Lehrstuhl A für Mathematik

Prof. Dr. R. J. Nessel
Dipl.-Math. R. Zeler

Seminar
Resonanzprinzipien in lokalkonvexen Räumen

Sommersemester 1994

5. Vortrag: **Bairesche Räume**

Hans-Georg Eßer (Matr.-Nr. 184 383)
10.05.1994

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Nachdem in den vorangegangenen Vorträgen die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften (insbesondere „Rechenregeln") linearer topologischer Räume vorgestellt wurden, beschäftigen wir uns im fünften Vortrag mit der Klasse der Baireschen Räume, in denen die leere Menge $\emptyset$ die einzige Teilmenge ist, die zugleich offen und von erster Kategorie ist (vgl. folgende Def.).

Ziel dieser Betrachtungen werden zwei Sätze von Banach bzw. Banach-Steinhaus sein, die sich mit der Stetigkeit und dem Konvergenzverhalten von Folgen linearer Operatoren befassen.

Interessant ist auch der Begriff der Gleichstetigkeit, zu dessen Definition wir die zusätzliche lineare Struktur der LTR nutzen, in denen sich die Stetigkeit eines linearen Operators auf Stetigkeit im Nullpunkt zurückführen läßt.

2. Einige elementare topologische Eigenschaften

Die folgenden Aussagen sind bereits aus der Topologie bekannt. Ihre Beweise sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt – sie können ruhigen Gewissens übersprungen werden.

Definition 2.1:

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ bel.
Definiere $\mathcal{T}_{ind} := \{\mathcal{O} \cap A \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$.
$\mathcal{T}_{ind}$ heißt die von $\mathcal{T}$ auf A induzierte Topologie, $(A, \mathcal{T}_{ind})$ heißt topologischer Unterraum von $(X, \mathcal{T})$.

Definition 2.2:

Sei $(X, \mathcal{T})$ topol. Raum, $(A, \mathcal{T}_{ind})$ topol. Teilraum.

(i) Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset A$ heißt offen relativ zu A, falls $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{ind}$, d.h. falls eine (im X) offene Menge $\tilde{\mathcal{O}} \in \mathcal{T}$ existiert, so daß $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} \cap A$.

(ii) Eine Teilmenge $F \subset A$ heißt abgeschlossen relativ zu A, falls $\complement_A F$ relativ offen ist.

<u>Definition 2.3:</u>

Sei $(X, \mathcal{T})$ topol. Raum, $A \subset X$.

(i) Ein Punkt $f \in A$ heißt <u>innerer Punkt</u> von A, falls ein $O \in \mathcal{T}$ existiert, so daß $f \in O \subset A$.

(ii) $\operatorname{int} A := \{f \in A;\ f \text{ innerer Punkt von } A\}$ heißt <u>das Innere</u> oder der <u>offene Kern</u> von A.

(iii) Ein Punkt $f \in X$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von A, falls in jeder Umgebung von f ein Punkt $g \in A$ liegt, so daß $g \neq f$.

(iv) $\bar{A} := A \cup \{f \in X:\ f \text{ Häufungspunkt von } A\}$ heißt Abschluß oder abgeschlossene Hülle von A.

<u>Lemma 2.4:</u>

Sei $(X, \mathcal{T})$ topol. Raum, $A \subset X$. Äquivalent sind:

(i) A dicht in X, d.h. $\bar{A} = X$

(ii) $\operatorname{int}(\complement A) = \emptyset$

(iii) $A \cap O \neq \emptyset \quad \forall\ O \in \mathcal{T},\ O \neq \emptyset$.

Insbesondere ist also A genau dann dicht, wenn A jede nichtleere offene Menge schneidet.

Beweis:

(i)$\Leftrightarrow$(ii): $\bar{A} = X \Leftrightarrow \complement \bar{A} = \emptyset \underset{\text{La. 2.3}}{\Leftrightarrow} \operatorname{int}(\complement A) = \emptyset$

(i)$\Rightarrow$(iii): A dicht in X, $O \neq \emptyset$ offen
$\Rightarrow \overline{A \cap O} \supset O \Rightarrow A \cap O \neq \emptyset$

(iii)$\Rightarrow$(ii): <u>Ann.:</u> $\operatorname{int}(\complement A) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \operatorname{int}(\complement A)$ offen, nichtleer,
aber $\operatorname{int}(\complement A) \cap A \underset{\text{La. 2.3}}{\subset} \complement A \cap A = \emptyset$ ↯ zu (iii). ∎

<u>Lemma 2.3:</u>

Sei $(X, \mathfrak{T})$ topologischer Raum, $A \subset X$.
Dann gilt:

(i) $C\overline{A} = \operatorname{int} CA$,

(ii) $C \operatorname{int} A = \overline{CA}$,

(iii) $\operatorname{int} A$ ist offen,

(iv) $\overline{A}$ ist abgeschlossen.

Beweis:

(i) $\xi \in C\overline{A} \Leftrightarrow \xi \notin \overline{A}$

$\Leftrightarrow \xi \notin A$ und ξ ist kein HP von A

$\Leftrightarrow \xi \in CA$ und $\exists$ Umgebung U von ξ mit $U \cap A = \emptyset$

$\Leftrightarrow \xi \in CA$ und $\exists$ Umgebung U von ξ mit $U \subset CA$

$\Leftrightarrow \xi$ ist innerer Punkt von CA

$\Leftrightarrow \xi \in \operatorname{int} CA$.

(ii) $\xi \in C \operatorname{int} A \Leftrightarrow \xi \notin \operatorname{int} A = \operatorname{int} CCA$

$\underset{(i)}{\Leftrightarrow} \xi \notin C\,\overline{CA}$

$\Leftrightarrow \xi \in \overline{CA}$

(iii) Nach Vorlesung Topologie ist der innere Kern $\operatorname{int} A$ die Vereinigung aller offenen Teilmengen: $\operatorname{int} A = \bigcup \{O \subset A ; O \text{ offen}\}$ und somit offen.

(iv) Genauso ist die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ der Schnitt aller abgeschlossen Obermengen: $\overline{A} = \bigcap \{F \supset A ; F \text{ abgeschlossen}\}$ und somit abgeschlossen. ∎

Definition 2.4:

Sei $(X, \mathcal{T})$ separierter topologischer Raum.

(i) $(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, falls $(X, \mathcal{T})$ die Heine-Borel-Eigenschaft besitzt, d.h.:
Ist $\mathfrak{U} = \{ U_i \mid i \in I \} \subset \mathcal{T}$ offene Überdeckung von X, also $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, dann gibt es ein endliches Teilsystem $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$ mit $X = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_0} U$.

(ii) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, falls $(A, \mathcal{T}_{ind})$ (Def. 2.1) kompakt ist.

(iii) $(X, \mathcal{T})$ heißt lokalkompakt, falls jeder Punkt $f \in X$ eine kompakte Umgebung K besitzt: $f \in K \subset X$.

Definition 2.5:

Seien X, Y LTR, $T, T_n : X \to Y$ linear, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to \infty} T_n f = Tf \quad \forall f \in X$.
(T_n) heißt gleichmäßig konvergent auf jedem Kompaktum, falls zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ und zu jeder Nullumgebung V in Y ein $n_0 = n_0(K, V) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$T_n f - Tf \in V \qquad \forall n \geq n_0, f \in K.$$

3. Bairesche Räume

Definition 3.1:

a) Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt nirgends dicht in X, falls die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ in X keine inneren Punkte hat, d.h. falls $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

b) $A \subset X$ heißt von erster Kategorie oder mager, falls A Vereinigung von höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Mengen $A_n \subset X$ ist:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset \quad (n \in \mathbb{N})$$

A heißt von zweiter Kategorie, falls A nicht von erster Kategorie ist.

Bemerkung 3.2:

Sei X topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist A genau dann von erster Kategorie, wenn gilt: Es gibt eine Folge abgeschlossener Mengen $A_n \subset X$ ohne Inneres $(\overline{A_n} = A_n, \operatorname{int} A_n = \emptyset)$, so daß

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei A von erster Kategorie. Also gibt es Teilmengen $A_n \subset X$ mit $\operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$ und

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Setze $B_n := \overline{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Dann sind die B_n abgeschlossen,
$\operatorname{int} B_n = \operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$ und wegen $A_n \subset \overline{A_n}$
gilt $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

„$\Leftarrow$": Es gelte $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\overline{A_n} = A_n$, $\operatorname{int} A_n = \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$.

Sei $D := \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \setminus A$, $B_n := A_n \setminus D$

D enthält also die Punkte aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, die nicht zu A gehören, also nehmen wir sie einfach weg:

$$\Rightarrow A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \setminus \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A\right]$$

$$= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \setminus D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus D)$$

$$=: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

wegen $B_n \subset A_n$ gilt $\operatorname{int} \overline{B_n} \subset \operatorname{int} \overline{A_n} \underset{\overline{A_n} = A_n}{\overset{\uparrow}{=}} \emptyset$,
also $\operatorname{int} \overline{B_n} = \emptyset$.
$\Rightarrow B_n$ nirgends dicht
$\Rightarrow A$ ist von erster Kategorie. ∎

Wir kommen nun zur Definition des zentralen Begriffs dieses Vortrages, nämlich zur Definition eines Baireschen Raumes:

Definition 3.3:

Ein separierter topologischer Raum X heißt <u>Bairescher Raum</u> (Baire: 1874–1932), falls mit abzählbar vielen in X offenen und dichten Teilmengen auch ihr Schnitt dicht in X ist, d.h.:

$O_1, O_2, \ldots \subset X$ offen mit $\overline{O_n} = X \;\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = X.$

Bekanntlich sind int und $\overline{}$ komplementäre Operationen, so wie offen und abgeschlossen zueinander komplementär sind. Daher gilt folgende

Bemerkung 3.4:

Sei X separierter topologischer Raum. Dann ist X genau dann Bairesch, wenn gilt: Sind $F_1, F_2, \ldots \subset X$ abgeschlossen mit $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$), dann ist auch das Innere ihrer Vereinigung leer: $\operatorname{int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \emptyset$.

Beweis: Setze $O_n := \complement F_n$, dann sind die O_n offen, und es gilt

$$\overline{O_n} = \overline{\complement F_n} \underset{\text{Lq. 2.3}}{=} \complement \operatorname{int} F_n \underset{\text{Vor.}}{=} \complement \emptyset = X$$

D.h. O_n dicht in X.
Zum Beweis reicht es also zu zeigen, daß

$$\operatorname{int}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \emptyset \iff \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = X.$$

Aber das ist klar:

$$\emptyset = \operatorname{int}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \operatorname{int}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \complement O_n\Big)$$

$$= \operatorname{int}\Big(\complement \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\Big)$$

$$\underset{\text{La. 2.3}}{=} \complement\, \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n}$$

$$\Longleftrightarrow \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = X. \qquad \blacksquare$$

Die Eigenschaft eines topologischen Raumes, Bairesch zu sein, vererbt sich auf seine offenen Teilmengen:

<u>Satz 3.5:</u>

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Bairescher Raum, $U \subset X$ offen und $(U, \mathcal{T}_{ind})$ der topologische Teilraum mit der von $\mathcal{T}$ auf U induzierten Topologie (gemäß Def. 2.1). Dann ist $(U, \mathcal{T}_{ind})$ Bairesch.

Beweis:

Seien $O_n \subset U$ relativ offen und dicht in U, d.h. $\overline{O_n}^{U} = U$, $n \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen ist: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in U.

Setze $O_n^{+} := O_n \cup \complement\, \overline{U}^{X}$

Dann gilt:
O_n dicht in $U \Rightarrow \overline{O_n}^{U} = U \Rightarrow \overline{O_n}^{X} \supset U$

Da $\overline{O_n}^X$ im X abgeschlossen ist, ist mit U auch $\overline{U}^X$ Teilmenge:

$$\overline{U}^X \subset \overline{O_n}^X \Rightarrow \overline{U}^X \subset \overline{O_n^+}^X$$

Außerdem gilt nach Konstruktion $C\overline{U}^X \subset O_n^+$, also auch $C\overline{U}^X \subset \overline{O_n^+}^X$

$$\Rightarrow X = \overline{U} \,\dot\cup\, C\overline{U} \subset \overline{O_n^+}^X \subset X$$

D.h.: O_n^+ dicht in X $\forall n \in \mathbb{N}$

Da X Bairesch ist, ist auch der Schnitt der O_n^+ dicht: $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n^+}^X = X$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n^+ = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [O_n \cup C\overline{U}^X] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \cup C\overline{U}^X$$

sei $x \in U$ beliebig. Zu zeigen: $x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n}^U$

$$x \in U \Rightarrow x \notin CU \underset{\substack{U \text{ offen} \\ CU \text{ abgeschl.}}}{=} \overline{CU}^X$$

$$\Rightarrow x \notin \overline{C\overline{U}}, \text{ da } \overline{U} \supset U \Rightarrow C\overline{U} \subset CU$$

Da der Schnitt der O_n^+ dicht in X ist, gilt

$$x \in X = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n^+}^X = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \cup C\overline{U}^X}^X$$

Da $x \notin \overline{C\overline{U}}$, folgt $x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n}^X \cap U = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n}^U$.

D.h.: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in U, also ist $(U, \mathcal{T}_{ind})$ Bairesch. ∎

In der Lebesgue-Theorie (und allgemeiner in der Maß-theorie) ist es üblich, mit Aussagen der Form „$f(x) < g(x)$ fast überall" oder „$f(x) = 0$ fast überall" zu arbeiten. Dabei bedeutet fast überall, daß die Aussage für alle Punkte bis auf eine Nullmenge (Menge vom Lebesgue-Maß 0, vergleiche Skript L vom Lehrstuhl) gilt.

Ein Analogon für Bairesche Räume liefert die folgende Definition:

<u>Definition 3.6</u>:

Sei X ein topologischer Raum. Eine Aussage P gilt in X <u>Baire-fast überall</u>, falls es eine Teilmenge $A \subset X$ von erster Kategorie gibt, so daß P für alle $f \in X \setminus A$ gilt.

<u>Satz 3.7</u>:

Sei X ein Bairescher Raum, und es gelten die Aussagen $P_1, P_2, \ldots$ in X Baire-fast überall. Dann gelten alle Aussagen gemeinsam in X Baire-fast überall.

Beweis:

Erinnern wir uns zunächst an das erste Cantorsche Diagonalisierungsverfahren (Cantor: 1845–1918), nach dem die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen selbst wieder abzählbar ist:

Ist M_n abzählbar für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es also eine Abzählung

$M_n = \{m_{n1}, m_{n2}, m_{n3}, \dots\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Ordnet man die M_n in Quadratform an:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ \cdots \\
\hline
1 & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\
2 & m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\
3 & m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\
4 & m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\
5 & m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\
6 & m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Dann kann diese Menge längs der Diagonalen abgezählt werden (wie eingezeichnet).

$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ist ebenfalls abzählbar.

Nun zum eigentlichen Beweis:

Nach Voraussetzung gilt jedes P_i Baire-fast überall, d.h.

$\forall i \in \mathbb{N} \ \exists A_i \subset X$, A_i von erster Kategorie, so daß P_i für alle $f \in X \setminus A_i$ gilt.

Sei P die „unendliche Konjunktion" der Aussagen P_n, $n \in \mathbb{N}$, also die Aussage, daß alle P_n gelten.

Dann gilt P für alle $f \in B := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (X \setminus A_i)$

Zeige: $A := \complement B$ ist von erster Kategorie.

Es gilt:

$$A = \complement B = \complement\,[\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \complement A_i] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \complement\complement A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

Da nach Vor. alle A_i von erster Kategorie sind, existieren Mengen $D_{i,n} \subset X$ $(i,n\in\mathbb{N})$ mit $\overline{D_{i,n}} = D_{i,n}$ und $\operatorname{int} D_{i,n} = \emptyset$, so daß

$$A_i \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{i,n} \quad \forall i\in\mathbb{N}$$

(Bemerkung 3.2).

Damit: $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{i,n}$

Dies ist nach Cantor eine abzählbare Vereinigung, also gilt (wieder mit Bemerkung 3.2), daß auch A von erster Kategorie ist.

$\Rightarrow$ P gilt in X Baire-fast überall. ∎

Als Antwort auf die Frage, ob es überhaupt Bairesche Räume gibt, geben wir:

<u>Satz 3.8:</u> <u>Satz von Baire</u>

(i) Ist d Metrik auf X und $\mathcal{T}_d$ die von d auf X erzeugte Topologie, so daß $(X, \mathcal{T}_d)$ vollständig ist, dann ist X Bairesch.

(ii) Ist X lokalkompakter topologischer Raum (d.h. jeder Punkt $\xi\in X$ besitzt eine kompakte Umgebung K, $\xi\in K\subset X$; und X ist separabel), dann ist X Bairesch.

Beweis: Die Beweise sehen sich sehr ähnlich.

Beginnen wir mit (i).
Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum mit der Topologie $\mathcal{T}_d$, die eindeutig durch die Umgebungsbasen $\mathcal{U}_x := \{S(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ mit $S(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ festgelegt ist.
zu zeigen: Sind $\mathcal{O}_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ offen und dicht in X, dann ist auch $\mathcal{O} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ dicht im X.
Seien also $\mathcal{O}_n \subset X$ offen und dicht in X, $n \in \mathbb{N}$.
Nach Lemma 2.4 ist $\mathcal{O}$ genau dann dicht in X, wenn $\mathcal{O}$ jede nicht leere offene Menge trifft, d.h.

$$\mathcal{O} \cap \Omega \neq \emptyset \text{ für alle offenen } \emptyset \neq \Omega \subset X.$$

Sei also $\Omega \subset X$ beliebig offen, nicht leer.
$\mathcal{O}_0$ ist dicht im $X \Rightarrow \mathcal{O}_0 \cap \Omega$ ist dicht im Ω, also insbesondere nicht leer.
Da mit $\mathcal{O}_0$ und Ω auch $\mathcal{O}_0 \cap \Omega$ offen ist, liegt eine ganze abgeschlossene Kugel $\overline{S_0} := \overline{S(a_0, \delta_0)}$ für geeignete $a_0 \in X$, $\delta_0 > 0$ im $\mathcal{O}_0 \cap \Omega$.
Im nächsten Schritt ersetze $\mathcal{O}_0$ durch $\mathcal{O}_1$ und Ω durch S_0.
Wie oben existiert $\overline{S_1} = \overline{S(a_1, \delta_1)} \subset \mathcal{O}_1 \cap S_0$, o.B.d.A. sei $\delta_1 \leq 1$.
Iteriere dieses Verfahren, wobei o.B.d.A. die Radien $\delta_n \leq \frac{1}{n}$ sind.

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt dann: $\overline{S_n} = \overline{S(a_n, \delta_n)} \subset O_n \cap S_{n-1}$.

Die Mittelpunkte a_n bilden eine CF in X, denn:

Wegen $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ und $a_n \in S_n$ gilt

$a_{n+p} \in S_n \quad \forall p \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d(a_{n+p}, a_n) \leq \delta_n \leq \frac{1}{n} \to 0, \; n \to \infty$

Nach Voraussetzung ist X vollständig, also konvergiert $(a_n)_n$ gegen ein Element $a \in X$. (Ob hier vollständig bzgl. der Metrik oder bzgl. der Topologie verstanden wird, ist gleichgültig, da der Konvergenzbegriff bei Metrik und Topologie gleich ist – schließlich ist die Topologie ja von der Metrik erzeugt.)

Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$a_{n+p} \in \overline{S_n} \quad \forall p$

$\Rightarrow (\overline{S_n}$ abgeschl.$) \quad a \in \overline{S_n}$

Also $a \in \overline{S_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a \in O_n \cap S_{n-1} \subset O_n \cap \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (O_n \cap \Omega) = O \cap \Omega$

Also: $O \cap \Omega \neq \emptyset$

Da Ω beliebig, folgt mit Lemma 2.4:

O ist dicht in X

Also ist X Bairescher Raum.

(ii) Sei X lokalkompakter topologischer Raum.
Seien $O_n \subset X$ offen und dicht in X.
Zu zeigen ist wieder: $O := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in X.

Wir benutzen wieder Lemma 2.4:
Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebige offene Teilmenge von X.
O_0 dicht $\Rightarrow O_0 \cap \Omega \neq \emptyset$
Mit Ω und O_0 ist auch $O_0 \cap \Omega$ offen.
Sei $a_0 \in O_0 \cap \Omega$ beliebiger (natürlich innerer) Punkt.
Nach Voraussetzung ist X lokalkompakt.
Diese Eigenschaft ist zwar nicht erblich, aber:

__Bemerkung 3.9:__

Sei X lokalkompakter topologischer Raum.
Dann besitzt jeder Punkt $f \in X$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen.

Nach Bemerkung 3.9 besitzt a_0 eine kompakte Umgebung $B_0 \subset O_0 \cap \Omega$.
Ersetze im nächsten Schritt O_0 durch O_1 und Ω durch die offene Menge int B_0.

Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man Punkte a_n und kompakte Umgebungen B_n von a_n mit $B_n \subset O_n \cap \operatorname{int} B_{n-1}$, insbesondere $B_n \subset B_{n-1}$.

Der Schnitt dieser absteigenden Folge von kompakten Mengen ist nicht leer, denn:

<u>Ann.:</u> $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$

Alle B_n sind Teilmengen des kompakten Teilraumes B_0.
Aus der Heine-Borel-Eigenschaft(*) (für B_0) folgt, daß der Schnitt der B_n genau dann leer ist, wenn es ein Teilsystem $\{B_n \mid n \in I\}$ mit endlichem I gibt, so daß $\bigcap_{n \in I} B_n = \emptyset$. Aber $\bigcap_{n \in I} B_n = B_{n_0}$ mit $n_0 := \max I$ und $B_{n_0} \neq \emptyset$ $\lightning$

Also: Wegen $B_n \subset O_n$ und $B_n \subset \Omega$ $\forall n \in \mathbb{N}$

gilt $\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \cap \Omega = O \cap \Omega$

$\Rightarrow$ (Lemma 2.4) O dicht in X

$\Rightarrow$ X Bairesch. ∎

(*) <u>Bemerkung</u>: Heine-Borel-Eigenschaft bedeutet:
<u>Ist</u> $X = \bigcup_{i \in I} O_i$, O_i offen $\Rightarrow \exists$ endliches $J \subset I$ mit $X = \bigcup_{i \in J} O_i$

Äquivalent:
Ist $\emptyset = \bigcap_{i \in I} F_i$, F_i abg. $\Rightarrow \exists$ endliches $J \subset I$ mit $\emptyset = \bigcap_{i \in J} F_i$

Folgerung 3.10:

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und alle Banach-Räume sind Bairesch.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen Baireschen Räumen und den Mengen von erster Kategorie, deren Definition auch von Baire stammt. Zur Erinnerung: Der Baire-Kategoriensatz (Satz 6, Kap. Ic, FA) sagte aus, daß jeder (nicht-leere) vollständige metrische Raum von zweiter Kategorie ist. Hier gilt nun:

Satz 3.11: Baire-Kategoriensatz

Sei X ein separierter topologischer Raum. Äquivalent sind:

(i) X ist Bairesch,

(ii) $\emptyset$ ist die einzige offene Teilmenge von X, die von erster Kategorie ist.

(iii) Mit Ausnahme von $\emptyset$ sind alle offenen Teilmengen von X, insbesondere X selbst, von zweiter Kategorie.

(iv) Ist $A \subset X$ von erster Kategorie, dann ist $\complement A$ dicht in X.

Beweis:

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Diese Äquivalenz ist einfach die Definition der Begriffe erste/zweite Kategorie.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Sei also X Bairesch, d.h.:
Sind $O_n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) offen und dicht in X, dann ist $O := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht in X.

Sei $U \subset X$ offen und von erster Kategorie.

Zu zeigen: $U = \emptyset$.

U von erster Kategorie, d.h

$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ für nirgends dichte Mengen $A_n \subset X$,

also $\operatorname{int} \overline{A_n} = \emptyset$

$\Leftrightarrow \complement \operatorname{int} \overline{A_n} = X$

$\underset{\text{La. 2.3}}{\Leftrightarrow} \overline{\complement \overline{A_n}} = X$

$\Leftrightarrow \complement \overline{A_n}$ dicht in X

$\underset{\text{La. 2.3}}{\Leftrightarrow} \operatorname{int} \complement A_n$ dicht in X

$\Rightarrow \complement U = \complement \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement A_n \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{int} \complement A_n$

ist dicht in X, da X Bairesch ist und mit $O_n := \operatorname{int} \complement A_n$ die O_n offen und dicht sind; also auch ihr Schnitt.

D.h.: $\overline{\complement U} = X$

$\underset{\text{La. 2.3}}{\Leftrightarrow} \complement \operatorname{int} U = X$

$\Leftrightarrow \operatorname{int} U = \emptyset$

Da U offen ist, folgt $U = \operatorname{int} U = \emptyset$.

Also ist U leer und (ii) gezeigt.

(ii) $\Rightarrow$ (iv):

Sei $\emptyset$ die einzige offene Teilmenge von X, die von erster Kategorie ist.

Sei $A \subset X$ von erster Kategorie. $\operatorname{int} A \subset A$ ist offen und per Definition (bzw. nach Bemerkung 3.2) ebenfalls von erster Kategorie

$\Rightarrow$ (wegen (ii)) $\operatorname{int} A = \emptyset$

$\Rightarrow$ $\complement \operatorname{int} A \underset{\text{La. 2.3}}{=} \overline{\complement A} = X$, d.h. $\complement A$ dicht in X.

(iv) $\Rightarrow$ (i):

Seien $O_n \subset X$ offen und dicht in X, $n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $O := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht in X.

Setze $A_n := \complement O_n$, $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, also $A = \complement O$.

Da O_n offen, ist A_n abgeschlossen: $\overline{A_n} = A_n$.

$\operatorname{int} \overline{A_n} = \operatorname{int} A_n = \operatorname{int} \complement O_n \underset{\text{La. 2.3}}{=} \complement \overline{O_n} = \complement X = \emptyset$

$\Rightarrow$ A_n nirgends dicht $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ A von erster Kategorie

$\Rightarrow$ (mit (iv)) $\complement A$ dicht in X

Also O dicht in X; X Baiesch. ∎

4. Gleichstetigkeit und die Sätze von Banach und Banach-Steinhaus

Wie in der Einleitung angekündigt, wollen wir einen neuen Stetigkeitsbegriff für Familien von Operatoren einführen, der die Linearität (sowohl der Operatoren als auch des Raumes) voraussetzt.

Definition 4.1:

Seien X, Y LTR (lineare topologische Räume) über demselben Körper Φ, sei $T: X \to Y$ linear.

(i) T heißt stetig in $f \in X$, falls zu jeder Umgebung V von Tf in Y eine Umgebung U von f in X existiert, so daß $T(U) \subset V$.

(ii) T heißt stetig auf X, falls T in jedem Punkt $f \in X$ stetig ist.

(iii) T heißt null-stetig, falls T stetig im Punkt $f = 0$ ist.

Wie bereits bekannt ist, sind (ii) und (iii) äquivalent:

Lemma 4.2:

Seien X, Y, T wie in Definition 4.1. Dann ist T genau dann stetig, wenn T null-stetig ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$" klar.

„$\Leftarrow$": Sei $f \in X$ beliebig, $g := Tf$, V eine beliebige Umgebung von g

$\Rightarrow$ $V - g$ ist Nullumgebung in Y.

Da T null-stetig ist, gibt es eine Nullumgebung U_0 in X mit $T(U_0) \subset V - g$.

Mit $U := U_0 + f$ gilt: U ist Umgebung von f, und

$$T(U) = T(U_0 + f) \underset{T\,\text{lin.}}{=} T(U_0) + Tf$$

$$\subset (V - g) + g = V$$

$\Rightarrow$ T stetig in f.

Da $f \in X$ beliebig war, ist T stetig auf X. ∎

Vor diesem Hintergrund macht die folgende Definition Sinn:

<u>Definition 4.3</u>:

Seien X, Y LTR, $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine beliebige Familie stetiger linearer Abbildungen $T_\alpha : X \to Y$. Dann heißt $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ <u>gleichstetig</u> auf X, falls zu jeder Nullumgebung V in Y eine Nullumgebung U in X existiert, so daß

$$T_\alpha(U) \subset V \quad \text{für alle } \alpha \in A.$$

Man beachte: Dieses U ist ein gemeinsames U für alle T_α, die Bedingung ist also schärfer als die einfache Stetigkeit der T_α.

Es folgt nun der erste Hauptsatz dieses Vortrags:

Satz 4.4: Satz von Banach (Banach: 1892-1945)

seien X, Y LTR, X Bairesch, $\mathcal{F}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren $T: X \to Y$.
Sei $\mathcal{F}(f) := \{Tf \mid T \in \mathcal{F}\}$ für $f \in X$, und definiere
$A := \{ f \in X : \mathcal{F}(f)$ beschränkt in $Y\}$.
Dann gilt entweder
(i) A ist von erster Kategorie in X, oder
(ii) $A = X$, und $\mathcal{F}$ ist gleichstetig.

Beweis:
Sei A nicht von 1. Kategorie in X.
zu zeigen ist also, daß $A = X$ und $\mathcal{F}$ gleichstetig ist.
Sei V eine Nullumgebung in Y, W eine abgeschlossene kreisförmige Nullumgebung mit $W + W \subset U$ (Existenz klar, denn: mit Satz II 7, Vortrag 1 $\exists$ Nullumg. W_0 mit $W_0 + W_0 \subset V$, nach Satz 3d, Vortrag 3 $\exists$ abgeschl. Nullumg. $W_1 \subset W_0$, nach Satz 3c $\exists$ kreisförmige Nullumg. $W_2 \subset W_1$. $W := \overline{W_2} \subset W_1$, da W_1 abg., und W kreisförmig, da W_2 kreisförmig.)

Sei $F_n := \{ f \in X : \mathcal{F}(f) \subset nW\}$.
$\Rightarrow F_n = \{ f \in X : Tf \in nW \quad \forall T \in \mathcal{F}\}$

$$= \bigcap_{T \in \mathcal{F}} \{ f \in X : Tf \in nW\} = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}(nW)$$

Es gilt: F_n ist abgeschlossen, denn:

W abgeschlossen $\Rightarrow$ nW abgeschlossen

$\Rightarrow$ (T stetig) $T^{-1}(nW)$ abgeschlossen

$\Rightarrow$ F_n als Schnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen.

A liegt in der Vereinigung ~~dieser~~ F_n, denn:

Sei $f \in A$, d.h. $\mathcal{F}(f)$ ist beschränkt.

$\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{F}(f) \subset nW$

(zur Erinnerung: eine Menge heißt beschränkt, falls sie von jeder Nullumgebung absorbiert wird)

$\Rightarrow$ $f \in F_n$ (nach Def. von F_n)

$\Rightarrow$ $f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, also $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Nun gibt es mindestens ein $p \in \mathbb{N}$, sodaß $\operatorname{int} F_p \neq \emptyset$, denn:

<u>Ann.</u>: $\operatorname{int} F_i = \emptyset \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ A liegt in der Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen mit leerem Inneren.

$\Rightarrow$ A ist von erster Kategorie ↯

Sei also $p \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} F_p \neq \emptyset$, setze $\mathcal{O} := \operatorname{int} F_p$, sei $a \in \mathcal{O}$ beliebiger (natürlich innerer) Punkt.

Es ist $\mathcal{O}$ als offene Menge Umgebung von a.

$\Rightarrow$ $\mathcal{O} - a$ ist Nullumgebung, setze $U := \mathcal{O} - a$.

$\forall f \in U: \quad Tf = T(f+a-a)$

$$\underset{T \text{ lin.}}{=} T(f+a) - Ta$$

Wir haben

$f \in U \Rightarrow f+a \in a+U = \mathcal{O} \subset F_p \Rightarrow \mathcal{F}(f+a) \subset pW$
$a \in \mathcal{O} \subset F_p \Rightarrow \mathcal{F}(a) \subset pW$

Also insbesondere $T(f+a) \in pW$ und $Ta \in pW$

$$\Rightarrow \quad Tf \in pW - pW \underset{W \text{ kreisförmig}}{=} pW + pW \subset pV \qquad \forall T \in \mathcal{F}.$$

$$\Rightarrow T(U) \subset pV \qquad \forall T \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{1}{p}U\right) \underset{T \text{ lin.}}{=} \frac{1}{p}T(U) \subset \frac{1}{p}pV = V$$

Somit haben wir gezeigt, zu jeder Nullumgebung V in Y gibt es eine Nullumgebung $U' := \frac{1}{p}U$ in X mit $T(U') \subset V \quad \forall T \in \mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}$ ist gleichstetig.

Zeige noch: $A = X$. Sei $f \in X$ beliebig, V Nullumg. in Y. Also $\exists$ Nullumg. U' in X mit $T(U') \subset V \quad \forall T \in \mathcal{F}$. Da U' als Nullumg. absorbierend ist, $\exists\, \alpha > 0$, sodaß $f \in \lambda U' \quad \forall |\lambda| > \alpha$.

$\Rightarrow Tf \in T(\lambda U') = \lambda T(U') \subset \lambda V \quad \forall T \in \mathcal{F}, |\lambda| > \alpha.$

Damit ist $\mathcal{F}(f)$ beschränkt, also $f \in A$.

D.h.: $X \subset A$. $A \subset X$ klar, also $A = X$.

Noch zu zeigen ist die Rückrichtung:
Aus $A = X$ folgt, daß A nicht von erster Kategorie ist.

Dazu: $A = X \Rightarrow A$ offen

Nach Satz 3.11 (i)$\Leftrightarrow$(ii) ist die einzige offene Teilmenge eines Baireschen Raumes, die von erster Kategorie ist, die leere Menge $\emptyset$. Da X Bairesch ist, kann also A nicht von erster Kategorie sein. ■

Die Aussage des Banachschen Satzes läßt sich auch so formulieren:
$\mathcal{F}(g)$ ist entweder für Baire-fast alle $g \in X$ unbeschränkt, oder aber für alle $g \in X$ beschränkt.

<u>Folgerung 4.5</u>:

Seien X, Y LTR, X Bairesch, $\mathcal{F}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren $T: X \to Y$. Falls $\mathcal{F}(g)$ für jedes $g \in X$ beschränkt ist, ist $\mathcal{F}$ gleichstetig.

Beweis:

$A := \{g \in X : \mathcal{F}(g) \text{ beschränkt in } Y\} = X$.
Damit folgt aus Satz 4.4, daß $\mathcal{F}$ gleichstetig ist. ■

Folgerung 4.6: Uniform-boundedness-principle (UBP)

Sei X ein Banach-Raum, Y ein normierter linearer Raum und $\mathcal{F}$ eine Familie von stetigen linearen Operatoren $T: X \to Y$.

Sei $\{ \|Tf\|_Y \mid T \in \mathcal{F}\}$ beschränkt (in $\mathbb{R}$) für jedes $f \in X$.

Dann gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß

$$\|T\|_{[X,Y]} \leq M \qquad \forall T \in \mathcal{F}.$$

Beweis:

X Banach-Raum

$\Rightarrow$ (Folgerung 3.10) X Bairesch.

Also ist Folgerung 4.5 anwendbar, und es gilt:

$\forall f \in X$: $\quad \{\|Tf\|_Y \mid T \in \mathcal{F}\}$ beschränkt in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (Satz 2.1, Vortrag 4 mit Halbnorm $p(f) := \|f\|_Y$)

$\{Tf \mid T \in \mathcal{F}\}$ beschränkt in Y

Also: $\mathcal{F}(f)$ ist für jedes $f \in X$ beschränkt in Y.

$\Rightarrow$ (Folgerung 4.5) $\mathcal{F}$ gleichstetig

$\Rightarrow$ Zu $V := S_Y(0,1) = \{g \in Y : \|g\| < 1\}$ gibt es eine Nullumgebung U in X mit $T(U) \subset V$ für alle $T \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ mit $S_X(0,\delta) = \{f \in X : \|f\| < \delta\} \subset U$

$\Rightarrow$ $T(S_X(0,\delta)) \subset V$

$$\Rightarrow T(S_X(0,1)) = T(\tfrac{1}{\delta} S_X(0,\delta))$$

$$\underset{T \text{ lin.}}{=} \frac{1}{\delta} T(S_X(0,\delta)) \subset \frac{1}{\delta} V =: M \cdot V \quad (M := 1/\delta)$$

d.h.: $\| Tf \| \leq M \quad \forall f \in X$ mit $\|f\| < 1$
$\forall T \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \| T \|_{[X,Y]} \leq M \quad \forall T \in \mathcal{F}. \qquad \blacksquare$$

<u>Bemerkung:</u>

Diese Folgerung ist genau die Version des UBP, die wir im Funktionalanalysis I als Satz 4, Kap. II c (UBP) kennengelernt haben.

<u>Satz 4.7</u>: <u>Satz von Banach - Steinhaus</u>

(Steinhaus: 1887–1972)

Seien X, Y LTR, X Bairesch.

$\mathcal{F} := \{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sei eine Folge von stetigen linearen Operatoren $T_n : X \to Y$, die punktweise gegen die Abbildung $T : X \to Y$ konvergieren.

$\Rightarrow$ T ist stetig und linear, $\mathcal{F}$ ist gleichstetig, und die T_n konvergieren auf jedem Kompaktum K <u>gleichmäßig</u>, d.h.: $K \subset X$ kompakt, V Nullumgebung in Y $\Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$T_n f - Tf \in V \qquad \forall f \in K \quad \forall n \geq n_0$$

Beweis:

(i) T linear:

$$T(\alpha f + \beta g) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha f + \beta g)$$

$$\underset{T_n \text{ lin.}}{=} \lim_{n\to\infty} [\alpha T_n f + \beta T_n g]$$

$$\underset{\substack{\text{Satz III.4} \\ \text{(Vortrag 1)}}}{=} \alpha \lim_{n\to\infty} T_n f + \beta \lim_{n\to\infty} T_n g$$

$$= \alpha Tf + \beta Tg.$$

(ii) T stetig:

Sei V eine beliebige Nullumgebung in Y. Dann gibt es nach Satz 3 d, Vortrag 3, eine abgeschlossene Nullumgebung W mit $W \subset V$.

$A := \{ f \in X : \mathcal{F}(f)$ beschränkt in $Y \}$ ist nicht von erster Kategorie, denn sonst könnten die (stetigen, also beschränkten) T_n nicht punktweise gegen T konvergieren.

Daraus folgt mit Satz 4.4, daß $\mathcal{F}$ gleichstetig ist, d.h.:
zu jeder Nullumgebung V in Y gibt es eine Nullumgebung U in X mit
$T_n(U) \subset V \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere gibt es ein solches U für das abgeschlossene W von oben:

$$T_n(U) \subset W \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h. $\quad T_n(f) \in W \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall f \in U$

$$\Rightarrow Tf = \lim_{n \to \infty} T_n(f) \in \overline{W} \quad \forall f \in U$$

$$\Rightarrow Tf \in \overline{W} \underset{W \text{ abg.}}{=} W \subset V \quad \forall f \in U,$$

also $T(U) \subset V$, d.h. T stetig in Null
$\Rightarrow$ (Lemma 4.2) T stetig auf X.

(iii) (T_n) gleichmäßig konvergent auf jedem Kompaktum:

Sei $K \subset X$ beliebige kompakte Teilmenge.
Zu zeigen: zu jeder Y-Nullumgebung V gibt es ein $n_0 = n_0(V) \in \mathbb{N}$, so daß
$T_n f - Tf \in V \quad \forall n \geq n_0,\ f \in K.$

Sei also V eine Nullumgebung in Y.
Analog zu Satz II 7, Vortrag 1 gibt es eine Nullumgebung W in Y mit
$W + W + W \subset V$ (ersetze im Beweis die Abbildung $+ : Y \times Y \to Y : (h, i) \mapsto h + i$ durch $+ : Y \times Y \times Y \to Y : (h, i, j) \mapsto h + i + j$, dann folgt die Behauptung wieder aus der Stetigkeit der Addition).

Mit $\mathcal{F}$ ist auch $\mathcal{F} \cup \{T\}$ gleichstetig, denn: gilt $T_n(U_1) \subset V\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $T(U_2) \subset V$ für Nullumgebungen U_1, U_2 in X, dann ist auch $U := U_1 \cap U_2$ Nullumgebung, und es gilt:
$T_n(U) \subset V\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ T(U) \subset V$, also
$S(U) \subset V$ für alle $S \in \mathcal{F} \cup \{T\}$.

$\Rightarrow$ Zu W existiert eine Nullumgebung U in X, so daß für alle $f - \bar{f} \in U$:

$$(*) \quad \begin{cases} T_n(f - \bar{f}) = T_n f - T_n \bar{f} \in W & \forall n \in \mathbb{N} \\ T(f - \bar{f}) = Tf - T\bar{f} \in W \end{cases}$$

O.B.d.A. kann U als offen vorausgesetzt werden, da jede Nullumgebung (per Definition) eine offene Nullumgebung enthält.

$\Rightarrow U_{\bar f} := U + \bar f$ ist offene Umgebung von $\bar f$

Natürlich gilt: $X = \{\bar f \mid \bar f \in X\} \subset \bigcup_{\bar f \in X} U_{\bar f}$

Also ist $\mathfrak{U} := \{U_{\bar f} \mid \bar f \in X\}$ eine offene Überdeckung von X und damit auch von $K \subset X$.

Da K kompakt ist, also die Heine-Borel-Eigenschaft besitzt, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$\mathfrak{U}_0 = \{U_{f_i} \mid i = 1, \dots, m,\ f_i \in X\} \quad \text{mit}$$

$$(**) \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{f_i}$$

Da $T_n \to T$ (punktweise), existiert zur Nullumgebung W und zu $f \in K$ ein $n_0 = n_0(W, f)$, so daß $T_n f - Tf \in W \ \forall n \geq n_0$.

Mit $n_1 := \max\limits_{1 \leq i \leq m} n_0(W, f_i)$ gilt:

$$T_n f_i - T f_i \in W \quad \forall n \geq n_1, \quad 1 \leq i \leq m$$

Also gilt für beliebiges $f \in K$:

$\exists\, i \in \{1, \dots, m\}$ mit $f \in U_{f_i}$ und:

$$
\begin{aligned}
T_n f - Tf &= T_n f - T_n f_i && \in W, \text{ da } f \in U_{f_i}, (*) \\
&\quad + T_n f_i - T f_i && \in W, \text{ da } n \geq n_i, (**) \\
&\quad + T f_i - T f && \in W, \text{ da } f \in U_{f_i}, (*) \\
&\in W + W + W \subset V
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ (T_n) konvergiert auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen T. ∎

<u>Folgerung 4.8</u>:

Seien X, Y lineare normierte Räume, X Banachraum, $T_n : X \to Y$ eine Folge stetiger linearer Operatoren, die punktweise gegen $T : X \to Y$ konvergieren.

$\Rightarrow$ Die T_n sind gleichgradig beschränkt (d.h.: $\exists M \in \mathbb{R}: \ \|T_n\|_{[X,Y]} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$), T ist stetig und linear, und die T_n konvergieren gleichmäßig auf jedem Kompaktum.

Beweis:

X ist als Banach-Raum Bairesch. Somit läßt sich Satz 4.7 anwenden, und wir erhalten direkt $T \in [X, Y]$ und die gleichmäßige Konvergenz auf jedem Kompaktum.

Zeige noch die gleichgradige Beschränktheit:

Ann.: Es gibt ein $f \in X$, so daß $\{ \|T_n f\|_Y \mid n \in \mathbb{N} \}$ nicht beschränkt ist.

Also ex. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, so daß

$\|T_{n_k} f\|_Y \geq k$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \|T_{n_k} f\|_Y = \infty$

Die n_k können aufsteigend gewählt werden, so daß $(T_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Mit (T_n) ist auch jede Teilfolge im Punkt f konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \|T_n f\|_Y = \infty$.

Aber $Tf = \lim\limits_{n \to \infty} T_n f$ und $T \in [X, Y]$,

d.h. insbesondere: $\|Tf\|_Y < \infty$ ↯

$\Rightarrow \{ \|T_n f\|_Y \mid n \in \mathbb{N} \}$ beschränkt für jedes $f \in X$

$\Rightarrow$ (Folgerung 4.6) $\exists\, M \in \mathbb{R}: \|T_n\|_{[X,Y]} \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$,

also sind die T_n gleichgradig beschränkt. ∎

Bemerkung 4.9:

Die Voraussetzung der Linearität der Operatoren kann nicht ersatzlos gestrichen werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

$X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}$, jeweils mit dem Betrag $|\cdot|$,

$T_n : X \to Y : f \mapsto f^n$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} T_n =: T : f \mapsto \begin{cases} 0, & f \in [0,1) \\ 1, & f = 1 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $f = 1$.

Literatur

[1] Laurent Schwartz: Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris, 1970
[2] Horst Schubert: Topologie, B. G. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage 1971
[3] Gottfried Köthe: Topologische Lineare Räume, Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage 1966
[4] Stephen Willard: General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1970
[5] John L. Kelley: General Topology, D. van Nostrand Company, Princeton, 1955
[6] R. J. Nessel: Funktionalanalysis I (WS 1993/94)
[7] E. Görlich: Topologie (SS 1993)

Index